

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Кафедра комп'ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-47М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з навчальної дисципліни
«Основи теорії систем і управління» для здобувачів вищої
освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною
програмою «Транспортні технології (на автомобільному
транспорті)» спеціальності 275 «Транспортні технології (на
автомобільному транспорті)» денної форми навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості
навчально-наукового механічного
інституту
Протокол № 6 від 26.01.2021 р.

Методичні вказівки до лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Основи теорії систем і управління» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» спеціальності 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» денної форми навчання [Електронне видання] / Грицюк П. М., Джоші О. І. – Рівне : НУВГП, 2021. 49 с.

Укладачі:

Грицюк П. М., д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики;

Джоші О. І., канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск:

Грицюк П. М., д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Керівник групи забезпечення
спеціальності 275 «Транспортні технології
(на автомобільному транспорті)»

Криstopчук М. Є.

ID перевірки: 1006216622 від 03.02.2021

© Грицюк П. М., Джоші О. І., 2021
© НУВГП, 2021

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Опис навчальної дисципліни	5
Мета та завдання навчальної дисципліни	5
Лабораторна робота № 1.	
Системний аналіз міжміських пасажирських перевезень	7
Лабораторна робота № 2.	
Модель парної лінійної регресії.....	12
Лабораторна робота № 3.	
Згладжування часових рядів	16
Лабораторна робота № 4.	
Оцінка якості трендової моделі часового ряду	19
Лабораторна робота № 5.	
Задача про розміщення соціальних об'єктів на дорожній мережі	21
Лабораторна робота № 6.	
Задача про найдешевшу дорожню мережу	25
Лабораторна робота № 7.	
Прийняття рішень в умовах невизначеності.....	28
Лабораторна робота № 8.	
Дослідження стійкості нелінійної динамічної системи.....	29
Література.....	31
Додатки	32

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Навчальна дисципліна «Основи теорії систем і управління» передбачає формування системних знань і розуміння концептуальних основ управління системами, що полягає у розкритті теоретичних та практичних основ проектування та експлуатації великих та складних систем, методів аналізу станів, оцінки їхніх характеристик та ефективності.

Практичне опанування базових положень дисципліни ґрунтується на виконанні **8 лабораторних робіт**, які охоплюють основні теми цієї дисципліни для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» спеціальності 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» **денної** форми навчання. Основною метою цих робіт є закріплення і перевірка знань, отриманих студентами у результаті теоретичного та самостійного вивчення курсу.

Кожне лабораторна робота виконується згідно індивідуального варіанту вихідних даних, порядок вибору яких визначається наступними параметрами:

К – номер групи;

Н – порядковий номер студента за списком групи.

При виконанні і оформленні звітів з лабораторних робіт необхідно дотримуватися послідовності, яка наводиться нижче і включає три основні етапи:

- постановка задачі;
- розв’язання задачі;
- аналіз отриманих результатів і висновки.

На етапі постановки задачі потрібно ознайомитися з метою та умовою кожної задачі відповідно до варіанту та визначитися з послідовністю її розв’язання.

Розв’язання кожної задачі можна виконувати або вручну, або у середовищі табличного процесора Excel (чи іншого). Під час розв’язування задачі спочатку розрахункові залежності подаються в загальному вигляді, а лише потім здійснюються відповідні розрахунки.

Аналіз отриманих результатів і висновки потрібно подавати у відповідному пункті розв’язку (дослідження), або у кінці завдання.

Звіти з виконаних лабораторних робіт оформлюються у зошиті або на окремих аркушах паперу формату А4 і подаються викладачу для перевірки. Також звіт можна подати в електронному вигляді в кабінеті дисципліни «Основи теорії систем і управління» на платформі Moodle з відповідною назвою файлу: **ЛР_<номер роботи>_<Прізвище ім’я студента>**. При отриманні позитивної рецензії студент допускається до захисту роботи. Захист лабораторної роботи є завершальним етапом роботи над нею.

ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Освітня програма, галузь знань, спеціальність, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів – 4	Галузь знань 27 «Транспорт»	Форма навчання
		денна
		Тип дисципліни
		обов'язковий
Модулів – 2	Спеціальність 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»	Рік підготовки
		2-й
		Семестр
		8-й
Змістових модулів – 2	Освітньо-професійна програма «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»	Лекції
		20 годин
		Лабораторні
		20 годин
Загальна кількість годин – 120	Освітній рівень – перший (бакалаврський)	Самостійна робота
		80 годин
		Форма підсумкового контролю
		екзамен

Примітка: співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить – **33,3%** до **66,7%**

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою навчальної дисципліни «Основи теорії систем і управління» є формування системних знань і розуміння концептуальних основ управління системами, що полягає у розкритті теоретичних основ проектування та експлуатації великих та складних систем, методів аналізу станів, оцінки їхніх характеристик та ефективності.

Завданням дисципліни є:

- формування понятійного апарату системології, отримання знань про математичні основи описання систем, аналіз та моделювання їхнього функціонування в межах системного підходу;

- отримання необхідних навичок застосування отриманих знань для вирішення практичних задач управління транспортними мережами.

Предметом вивчення дисципліни є процеси, які відбуваються у складних виробничих системах, оцінка стану та динаміки їх розвитку.

Місце дисципліни в структурно-логічній схемі підготовки фахівця:

- перелік дисциплін, на які безпосередньо спирається вивчення даної дисципліни – «Вища математика», «Теорія ймовірностей і математична статистика», «Інформатика та комп'ютерна техніка», «Основи теорії транспортних процесів і систем»;
- перелік дисциплін, вивчення яких безпосередньо спирається на дану дисципліну – «Основи наукових досліджень», «Логістика».

Після вивчення дисципліни студент повинен:

знати: основні поняття теорії систем; методи аналізу стану системи, етапи системного аналізу; характеристики моделей та процес їх побудови; основні закони управління; принципи адаптивного управління; методи прийняття рішень в складних системах великої розмірності;

вміти: встановлювати межі систем, їх основні елементи та організаційну структуру системи; виконувати етапи системного аналізу; виконувати композицію і декомпозицію причинно-наслідкових зв'язків між елементами системи; проаналізувати зв'язки між елементами системи, побудувати найпростішу модель системи та прогноз її розвитку; виконувати ідентифікацію систем статичними, динамічними та статистичними методами; визначити стан системи, розмірність системи, ступінь її детермінованості, побудувати фазову траєкторію; формалізувати алгоритми функціонування системи при детермінованих режимах експлуатації та в умовах невизначеності; провести оптимізаційне моделювання транспортної системи; обґрунтовано вибрати метод (або послідовність методів) прийняття рішень, в залежності від класу розв'язуваних задач; виконувати аналіз системи за ознаками керованості і спостережності; робити оцінку надійності системи управління; дослідити стійкість системи, частотну характеристику системи управління, визначити реакцію системи на випадкові збурення; визначити шляхи і засоби управління об'єктами при повній, неповній та нечіткій інформації.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Системний аналіз міжміських пасажирських перевезень

Мета роботи. Набуття практичних навичок системного аналізу пасажирських перевезень.

Завдання роботи. Скласти трьохрічний бізнес-план роботи транспортного підприємства (приватної фірми), яке обслуговує маршрут Рівне – Київ – Рівне, підрахувавши очікуваний прибуток.

Основні характеристики маршруту: довжина маршруту – 650 км; орієнтовний річний пробіг автобуса – 200 тис. км; стартовий капітал підприємця – 300 тис. грн.; орієнтовний річний дохід – 700 тис. грн..

Основні характеристики транспортного засобу (автобуса): ціна нового автобуса – 300 тис. грн.; ціна б/в автобуса – 150 тис. грн.; вартість ремонту двигуна – 40 тис. грн.; вартість встановлення нового двигуна – 100 тис. грн..

Інші вихідні дані – ймовірність поломки нового двигуна на 1-й, 2-й, 3-й рік відповідно; ймовірність поломки б/в двигуна на 1-й, 2-й, 3-й рік відповідно; річні експлуатаційні витрати (техобслуговування, паливно-мастильні матеріали, зарплата водія тощо) нового автобуса, тис. грн.; річні експлуатаційні витрати б/в автобуса, тис. грн., – наведено в додатку А.

Оскільки другий ремонт для двигуна не рекомендується, при повторній поломці двигуна здійснюється заміна двигуна на новий.

Приклад розв'язування задачі. За вихідними даними, наведеними вище, скласти трьохрічний бізнес-план роботи транспортного підприємства. Інші вихідні дані наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Ймовірність поломки двигуна

Рік експлуатації Стан двигуна	1	2	3
Новий	0	0,1	0,3
Після ремонту	0,1	0,3	0,6
Після двох ремонтів	Заміна двигуна		

Варіант 1 – «Новий автобус». Для розрахунку бізнес-плану необхідно використати основні поняття теорії ймовірностей. Використовуючи поняття складної події та її ймовірності ми можемо розрахувати економічну ефективність бізнес плану із врахуванням усіх варіантів розвитку подій. Оскільки другий ремонт для двигуна не рекомендується, тому при повторній поломці двигуна необхідно виконати заміну двигуна на новий. При аналізі

експлуатації нового автобуса протягом 3-х років необхідно розглянути різні варіанти, які можуть скластися залежно від надійності роботи його двигуна.

Вводимо умовні позначення можливих станів: БР – без ремонту; Р – ремонт; ЗД – заміна двигуна.

На першому році експлуатації, при новому двигуні, його поломка практично виключена, $p'_1 = 1$. Вартість експлуатації становить $B'_1 = 300$ тис. грн.. Середньоімовірнісна вартість визначається за розрахунковою залежністю $B'_H = B'_1 \cdot p'_1$. Отже, $B'_H = 300 \cdot 1 = 300$ тис. грн..

На другому році експлуатації ймовірність поломки двигуна становить $p''_1 = 0,1$, ймовірність безвідмовної роботи $p''_2 = 1 - 0,1 = 0,9$. Вартість першого варіанту становить $B''_1 = 340$ тис. грн., вартість другого варіанту $B''_2 = 300$ тис. грн.. Середньоімовірнісна вартість визначається за розрахунковою залежністю $B''_H = B''_1 \cdot p''_1 + B''_2 \cdot p''_2$.

Отже, $B''_H = 340 \cdot 0,1 + 300 \cdot 0,9 = 34 + 270 = 304$ тис. грн..

На третьому році роботи можливі 4 варіанти експлуатації, які залежать від варіантів, які були реалізовані на другому році:

а) БР2 + БР3. Двигун служить без ремонту протягом 2-го і 3-го років експлуатації. Ймовірність такого варіанта становить $p'''_1 = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B'''_1 = 300$ тис. грн.;

б) БР2 + Р3. Другий рік без ремонту, третій рік – ремонт. Ймовірність такого варіанта становить $p'''_2 = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B'''_2 = 300 + 40 = 340$ тис. грн.;

в) Р2 + БР3. Ремонт на 2-му році і безремонтний 3-й рік. Ймовірність такого варіанта становить $p'''_3 = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B'''_3 = 300$ тис. грн.;

г) Р2 + ЗД3. Ремонт на 2-му році і заміна двигуна на 3-му році. Ймовірність такого варіанта становить $p'''_4 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$. Оскільки повторний ремонт двигуна не рекомендується, необхідно встановити новий двигун. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B'''_4 = 300 + 100 = 400$ тис. грн..

Середньоімовірні затрати на третьому році експлуатації обчислюються за розрахунковою залежністю $B'''_H = B'''_1 \cdot p'''_1 + B'''_2 \cdot p'''_2 + B'''_3 \cdot p'''_3 + B'''_4 \cdot p'''_4$.

Отже, $B'''_H = 300 \cdot 0,63 + 340 \cdot 0,27 + 300 \cdot 0,09 + 400 \cdot 0,01 = 311,8$ тис. грн..

Середньоімовірні затрати трьохрічної експлуатації для варіанту бізнес-плану 1 щодо придбання нового автобуса становлять $B_H = B'_H + B''_H + B'''_H$.

Таким чином $B_H = 300 + 304 + 311,8 = 915,8$ (тис. грн.)

Результати наведених вище розрахунків зведено до табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Результати розрахунків показників бізнес-плану роботи транспортного підприємства у випадку придбання нового автобуса

Ймовірність простих подій							
Рік	Показники						
1-й	Стан	БР					
	Ймовірність	1					
2-й	Стан	БР			Р		
	Ймовірність	0,9			0,1		
3-й	Стан	БР	Р	БР	ЗД		
	Ймовірність	0,7	0,3	0,9	0,1		
Ймовірність складних подій							
Рік	Показники						Сума
1-й	Стан	БР					<div></div>
	Ймовірність	1					1
2-й	Стан	БР			Р		<div></div>
	Ймовірність	0,9			0,1		1
3-й	Стан	БР	Р	БР	ЗД	<div></div>	
	Ймовірність	0,63	0,27	0,09	0,01	1	
Річні витрати							
Рік	Показники						
1-й	Стан	БР					
	Річні витрати	300					
2-й	Стан	БР			Р		
	Річні витрати	300			340		
3-й	Стан	БР	Р	БР	ЗД		
	Річні витрати	300	340	300	400		
Середньоймовірні річні витрати							
Рік	Показники						Сума
1-й	Стан	БР					<div></div>
	Річні витрати	300					300
2-й	Стан	БР			Р		<div></div>
	Річні витрати	270			34		304
3-й	Стан	БР	Р	БР	ЗД	<div></div>	
	Річні витрати	189	91,8	27	4	311,8	
						$B_H =$	915,8

Очікуваний дохід становить $D_H = 700 \cdot 3 = 2100$ тис. грн..

Очікуваний прибуток становить $\Pi_H = D_H - B_H$, або
 $\Pi_H = 2100 - 915,8 = 1184,2$ тис. грн.

Отже, як показали розрахунки загальний прибуток від експлуатації нового автобуса за три роки становить **1184,2 тис. грн.**

Варіант 2 – «Автобус, бувший у вжитку». Експлуатація двигуна автобуса, який вже був у використанні прирівнюється до експлуатації двигуна після першого ремонту. Ймовірність безвідмовної роботи такого двигуна на першому році експлуатації становить 0,9, на другому році – 0,7, на третьому році – 0,4. Після першої поломки двигуна необхідно встановлювати новий двигун. За початковий капітал 300 тис. грн. можна придбати 2 автобуси б/в. При аналізі експлуатації автобуса б/в протягом 3-х років необхідно розглянути різні варіанти, які можуть скластися залежно від надійності роботи двигуна (табл. 1.1). Всього можливі 5 варіантів експлуатації:

а) БР1 + БР2 + БР3. Двигун служить без ремонту протягом трьох років експлуатації. Ймовірність такого варіанта становить $P_1'' = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,252$.

Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B_{1\delta/\epsilon}''' = 450 \cdot 3 = 1350$ тис. грн.;

б) БР1 + БР2 + ЗД3. Перший і другий рік без ремонту, третій рік – заміна двигуна. Ймовірність такого варіанта становить $P_2'' = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,378$.

Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B_{2\delta/\epsilon}''' = 450 \cdot 3 + 100 = 1450$ тис. грн.;

в) БР1 + ЗД2 + БР3. Заміна двигуна на 2-му році і безремонтні 1-ий та 3-ій роки. Ймовірність такого варіанту становить $P_3''' = 0,9 \cdot 0,3 \cdot 1 = 0,27$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B_{3\delta/\epsilon}''' = 450 \cdot 3 + 100 = 1450$ тис. грн.;

г) ЗД1 + БР2 + БР3. Поломка на першому році і безремонтні 2-ий та 3-ій роки. Ймовірність такого варіанту становить $P_4''' = 0,1 \cdot 1 \cdot 0,9 = 0,09$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B_{4\delta/\epsilon}''' = 450 \cdot 3 + 100 = 1450$ тис. грн.;

д) ЗД1 + БР2 + Р3. Заміна двигуна на першому році і ремонт на 3-му році. Ймовірність такого варіанту становить $P_5''' = 0,1 \cdot 1 \cdot 0,1 = 0,01$. Затрати при цьому варіанті дорівнюють $B_{5\delta/\epsilon}''' = 450 \cdot 3 + 40 + 100 = 1490$ тис. грн.;

Середньоімовірні затрати трьохрічної експлуатації для варіанту 2 щодо придбання автобусу бувшого у вжитку становлять

$$B_{\delta/\epsilon} = B_{1\delta/\epsilon}''' \cdot P_1''' + B_{2\delta/\epsilon}''' \cdot P_2''' + B_{3\delta/\epsilon}''' \cdot P_3''' + B_{4\delta/\epsilon}''' \cdot P_4''' + B_{5\delta/\epsilon}''' \cdot P_5'''$$

Таким чином

$$B_{\text{б/в}} = 1350 \cdot 0,252 + 1450 \cdot 0,378 + 1450 \cdot 0,270 + \\ + 1450 \cdot 0,090 + 1490 \cdot 0,010 = 1425,2 (\text{тис. грн.})$$

Результати наведених вище розрахунків зведено до табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Результати розрахунків показників бізнес-плану роботи транспортного підприємства у випадку придбання бувшого у вжитку автобуса

Ймовірність простих подій						
Рік	Показники					
1-й	Стан	БР			ЗД	
	Ймовірність	0,9			0,1	
2-й	Стан	БР		ЗД	БР	
	Ймовірність	07		0,3	1	
3-й	Стан	БР	ЗД	БР	БР	Р
	Ймовірність	0,4	0,6	1	0,9	0,1
Ймовірність складних подій						
Рік	Показники					
1-й	Стан	БР			ЗД	
	Ймовірність	0,9			0,1	
2-й	Стан	БР		ЗД	БР	
	Ймовірність	0,63		0,27	0,1	
3-й	Стан	БР	ЗД	БР	БР	Р
	Ймовірність	0,25	0,38	0,27	0,09	0,01
Річні витрати						
Рік	Показники					
1-й	Стан	БР			ЗД	
	Річні витрати	450			550	
2-й	Стан	БР		ЗД	БР	
	Річні витрати	450		550	450	
3-й	Стан	БР	ЗД	БР	БР	Р
	Річні витрати	450	550	450	450	490
Середньоймовірні річні витрати						
Рік	Показники					
1-й	Стан	БР			ЗД	
	Річні витрати	405			55	
2-й	Стан	БР		ЗД	БР	
	Річні витрати	283,5		148,5	45	
3-й	Стан	БР	ЗД	БР	БР	Р
	Річні витрати	113,4	207,9	121,5	40,5	4,9
						1425,2

Очікуваний дохід становить $D_{б/в} = 700 \cdot 3 \cdot 2 = 4200$ тис. грн..

Очікуваний прибуток становить

$$П_{б/в} = 4200 - 1425,20 \cdot 2 = 1349,60 \text{ тис. грн.}$$

Отже, як показали розрахунки загальний прибуток від експлуатації бувшого у вжитку автобуса за три роки становить **1349,60 тис. грн.**

Висновок. Другий варіант бізнес-плану є більш економічно вигідним.

Контрольні запитання

1. Предметом системного аналізу є...
2. Наведіть приклади взаємозв'язку просторово-часових та ресурсних (матерія, енергія, інформація, суспільство) характеристик деякої проблемної ситуації.
3. Поняття системи. Різні трактування терміну «система».
4. Схема системи типу «вхід-вихід». Наведіть приклади.
5. Поняття про зв'язки в системі. Зворотні зв'язки.
6. Структура системи. Елементи і підсистеми. Декомпозиція. Топологічний аналіз структури системи.
7. Що таке функція і мета системи? Як класифікуються цілі?
8. Стан та поведінка системи, процес, динаміка системи.
9. Класифікація і властивості систем.
10. Прості, складні та великі системи. Оцінка складності.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Модель парної лінійної регресії

Мета роботи. Набуття практичних навичок побудови моделі парної лінійної регресії.

Завдання роботи. За даними, наведеними в додатку Б, побудувати модель парної лінійної регресії $y = b_0 + b_1x + \varepsilon$ та оцінити параметри рівняння лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1x$ і виконати його дослідження. Специфікація моделі парної лінійної регресії: x – обсяг коштів, які виділяються на технічне обслуговування автомобілів (тис. грн.), y – річний прибуток фірми (тис. грн.).

Приклад розв'язування задачі

1. В середовищі MS Excel розмістити початкові дані у вигляді таблиці (додаток Б: стовпчики x та y).

- За вихідними даними x та y побудувати діаграму розсіювання (точковий графік): Вставка → Діаграммы → Точечная (рис. 2.1).
- Додати лінію тренду: ПКМ → Добавить линию тренда → Параметры → Показывать уравнение на диаграмме → Поместить на диаграмму R^2 (рис. 2.1).

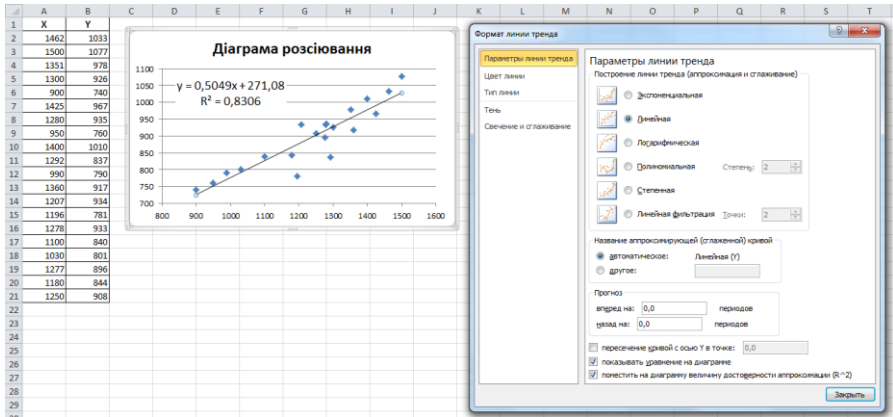


Рис. 2.1. Побудова лінії тренда

- Обчислити коефіцієнт кореляції $r = \sqrt{R^2}$. Оцінити статистичну значущість коефіцієнта кореляції за критерієм $|t_r| > t_{kp}$, де $t_{kp} = t_{\alpha/2, n-k}$; α – рівень значущості, зв'язаний з рівнем надійності $P = 0,95$ співвідношенням $\alpha = 1 - P$; $n = 20$; $k = 2$; $t_r = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$.
- Використовуючи оцінки параметрів парної лінійної регресії b_0 та b_1 , отримані з діаграми, розрахувати теоретичні значення y^* за формулою $y^* = b_0 + b_1 x$.
- Використовуючи функцію ПРЕДСКАЗ, розрахувати теоретичні значення \hat{y} . Порівняти значення y^* і \hat{y} . Пояснити причину розбіжностей.
- Заповнивши три останні стовпці таблиці, розрахувати загальну суму квадратів відхилень $SQ_y = \sum (y_i - \bar{y})^2$; факторну (пояснену) суму

квадратів відхилень $SQ_{факт} = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$; залишкову суму квадратів відхилень $SQ_{залиш} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				b1=	0,5049			
2				b0=	271,08			
3	i	X	Y	Y*	\hat{Y}	$(Y - \bar{Y})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \hat{Y})^2$
4	1	1462	1033	1009,24	1009,26	18947,52	12974,81	563,73
5	2	1500	1077	1028,43	1028,44	32996,72	17713,88	2357,73
6	3	1351	978	953,20	953,21	6831,02	3348,05	614,43
7	4	1300	926	927,45	927,46	939,42	1031,19	2,14
8	5	900	740	725,49	725,50	24133,62	28849,28	210,27
9	6	1425	967	990,56	990,58	5133,72	9067,89	555,80
10	7	1280	935	917,35	917,36	1572,12	484,61	311,03
11	8	950	760	750,74	750,74	18319,62	20910,72	85,66
12	9	1400	1010	977,94	977,95	13144,62	6823,22	1027,02
13	10	1292	837	923,41	923,42	3404,72	788,08	7468,91
14	11	990	790	770,93	770,94	11098,62	15477,63	363,25
15	12	1360	917	957,74	957,76	468,72	3894,57	1661,09
16	13	1207	934	880,49	880,51	1493,82	220,35	2861,64
17	14	1196	781	874,94	874,95	13075,92	416,09	8826,93
18	15	1278	933	916,34	916,35	1417,52	441,17	277,08
19	16	1100	840	826,47	826,48	3063,62	4742,98	182,77
20	17	1030	801	791,13	791,14	8901,92	10860,31	97,28
21	18	1277	896	915,84	915,85	0,42	420,22	393,99
22	19	1180	844	866,86	866,87	2636,82	810,93	523,19
23	20	1250	908	902,21	902,22	160,02	47,15	33,45
24		\bar{Y} =	895		SQ=	167740,55	139323,16	28417,39

Рис. 2.2. Показники моделі лінійної регресії

8. Перевірити рівність $SQ_y = SQ_{факт} + SQ_{залиш}$

9. Обчислити загальну дисперсію $D = \frac{SQ_y}{n-1}$, де $n = 20$; факторну

дисперсію $D_{факт} = SQ_{факт}$ та залишкову дисперсію $D_{залиш} = \frac{SQ_{залиш}}{n-2}$.

10. Визначити показники моделі лінійної регресії, використовуючи функцію ЛИНЕЙН (рис. 2.3).

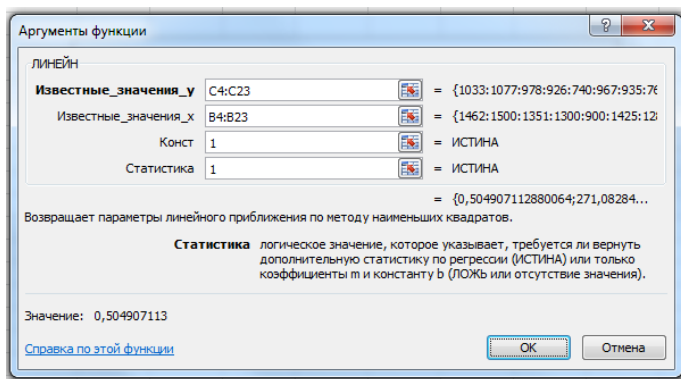


Рис. 2.3. Диалогове вікно функції ЛИНЕЙН

Для цього необхідно: виділити курсором порожні 5 рядків і 2 стовпці → Мастер функцій → Статистические → ЛИНЕЙН → CTRL+SHIFT+ENTER (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Показники моделі лінійної регресії

	b_1	b_0	
$b_i =$	0,505	271,1	Коефіцієнти регресії
$\sigma_{b_i} =$	0,054	67,04	Похибки коефіцієнтів регресії
$R^2 =$	0,831	39,73	Коефіцієнт детермінації і стандартна помилка оцінки y
$F =$	88,25	18	Критерій Фішера і кількість ступенів свободи
$S =$	139323	28417	Пояснена дисперсія і дисперсія залишків

11. Перевірити рівність $F = \frac{D_{факт}}{D_{залиш}}$.
12. Перевірити гіпотезу про адекватність лінійної моделі за умовою $F > F_{кр}$, де $F_{кр}$ визначається за допомогою функції Ф.ОБР.ПХ або ФРАСПОБР при цьому $\alpha = 0,05$; $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = n - k$, де $n = 20$; $k = 2$.
13. Визначити фактичні значення t-критерію Стьюдента для параметрів лінійного рівняння регресії: $t_{b_i} = \left| \frac{b_i}{\sigma_{b_i}} \right|$. Значення b_i знаходяться в першому рядку таблиці результатів функції ЛИНЕЙН (табл. 2.1), значення σ_{b_i} – в другому рядку цієї таблиці.

14. Визначити критичне значення критерія Стюдента $t_{кр}$, використовуючи функцію СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х або СТЬЮДРАСПОБР при цьому $\alpha = 0,05$; $\nu = n - k$, де $n = 20$; $k = 2$.
15. Перевірити статистичну значущість параметрів b_0 і b_1 за умовою $|t_{b_i}| > t_{кр}$.
16. Визначити нижню та верхню межу довірчих інтервалів для параметрів лінійної регресійної моделі b_0 і b_1

$$b_i - t_{кр} \cdot \sigma_{b_i} \leq b_i \leq b_i + t_{кр} \cdot \sigma_{b_i}.$$
17. Зробити висновки щодо отриманих показників.

Контрольні запитання

1. Поняття випадкової величини, числові характеристики випадкової величини.
2. Що таке генеральна сукупність, вибірка з генеральної сукупності? Які умови мають виконуватися, щоб вибірка була репрезентативною?
3. Функціональний та кореляційний зв'язок випадкових величин.
4. Поняття регресії. Регресійний аналіз. Побудова емпіричних регресійних формул.
5. Передумови застосування методу найменших квадратів.
6. Лінійна регресія. Знаходження коефіцієнтів лінійної регресійної залежності двох величин.
7. Як провести верифікацію моделі парної лінійної регресії?
8. Що показує коефіцієнт парної кореляції між змінними x і y ?
9. Для перевірки статистичної значущості коефіцієнта кореляції і параметрів регресійної моделі використовують критерій...
10. Критерієм чого виступає коефіцієнт детермінації?
11. F – критерій Фішера використовується для перевірки...
12. Поняття довірчого інтервалу. Як побудувати довірчі інтервали для параметрів лінійної регресійної моделі?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Згладжування часових рядів

Мета роботи. Набуття практичних навичок згладжування часових рядів врожайності зернових.

Завдання роботи. За даними, наведеними в додатку В, за допомогою метода експонентного згладжування та метода ковзного середнього виконати згладжування часового ряду врожайності зернових.

Приклад розв'язування задачі

1. В табличному редакторі MS Excel створити розрахункову таблицю (рис. 3.1). Для цього на листі табличного редактора в стовпці А розмістити номери елементів часового ряду, а в стовпці В – дані врожайності зернових.

	A	B	C	D	E	F
1	i	y _i	Метод ковзного середнього		Метод експонентного згладжування	
2			y _i (МКС)	e _i (МКС)	y _i (МЕЗ)	e _i (МЕЗ)

Рис. 3.1. Розрахункова таблиця

2. Згладити початковий ряд $\{y_i\}$ методом ковзного середнього з шириною вікна $w=9$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_1 = (2 \cdot x_1 + x_2) / 3; \\ \hat{y}_2 = (x_1 + x_2 + x_3) / 3; \\ \hat{y}_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) / 5; \\ \hat{y}_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) / 7; \\ \hat{y}_i = (x_{i-4} + x_{i-3} + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4}) / 9; \\ i = 5, \dots, n-4; \\ \hat{y}_{n-3} = (x_{n-6} + x_{n-5} + x_{n-4} + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) / 7; \\ \hat{y}_{n-2} = (x_{n-4} + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) / 5; \\ \hat{y}_{n-1} = (x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) / 3; \\ \hat{y}_n = (2 \cdot x_n + x_{n-1}) / 3. \end{array} \right.$$

Результати розрахунків розмістити в стовпці С. Побудувати ряд залишків $e_t = y_t - \hat{y}_t$, $t = 1..n$, $n = 56$ та розмістити розрахункові значення в стовпці D.

3. Згладити початковий ряд $\{y_i\}$ методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,25$.

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$\hat{y}_2 = x_1;$$

$$\hat{y}_3 = \alpha \cdot x_2 + (1 - \alpha) \cdot y_2;$$

...

$$\hat{y}_{n+1} = \alpha \cdot x_n + (1 - \alpha) \cdot y_n.$$

Результати розрахунків згладженого ряду розмістити в стовпці Е. Побудувати ряд залишків $e_t = y_t - \hat{y}_t$, $t = 1..n$, $n = 56$ та розмістити розрахункові значення в стовпці F.

4. Побудувати графіки початкового ряду та обох згладжених рядів.

5. Побудувати графіки залишків обох рядів.

6. Визначити середнє значення для обох рядів залишків. Зробити висновок.

7. Виконати дослідження залишків обох рядів на незалежність. Побудувати та проаналізувати графіки АКФ (10 коефіцієнтів). Для побудови АКФ рекомендується використовувати функцію MS Excel з категорії Статистичні – **KORPEЛ**, або ж засоби пакету Statistica. Наприклад, якщо ряд задано в інтервалі B5:B60, то перший коефіцієнт кореляції знаходять наступним чином – **KORPEЛ(\$B\$5:\$B\$50 ; B6:B51)**. Як бачимо, в розрахунок кореляції не входять останні 10 елементів ряду. Це необхідно для того, щоб мати можливість обчислити ще 9 коефіцієнтів автокореляції, для кожного з яких другий відрізок ряду буде «ковзати» вниз по заданому ряду. Наприклад, для розрахунку другого коефіцієнта автокореляції вводять функцію **KORPEЛ(\$B\$5:\$B\$50 ; B7:B52)**, для розрахунку третього – функцію **KORPEЛ(\$B\$5:\$B\$50 ; B8:B53)** тощо. За отриманими результатами зробити висновок.

8. Виконати дослідження обох рядів залишків на відповідність до нормального закону розподілу. Побудувати графіки залишків у нормальній імовірнісній площині. Для перевірки відповідності залишків ряду до нормального закону розподілу рекомендується використовувати можливості пакету Statistica. Завантаживши програму Statistica 6.0 слід виконати команди **Statistic → Basic Statistic Tables → Normal Probability Plot**. Якщо на кінцях графіка спостерігаються відхилення точок від прямої лінії, це свідчить про відхилення даних від нормального закону розподілу (рис. 3.2). Зробити висновок.

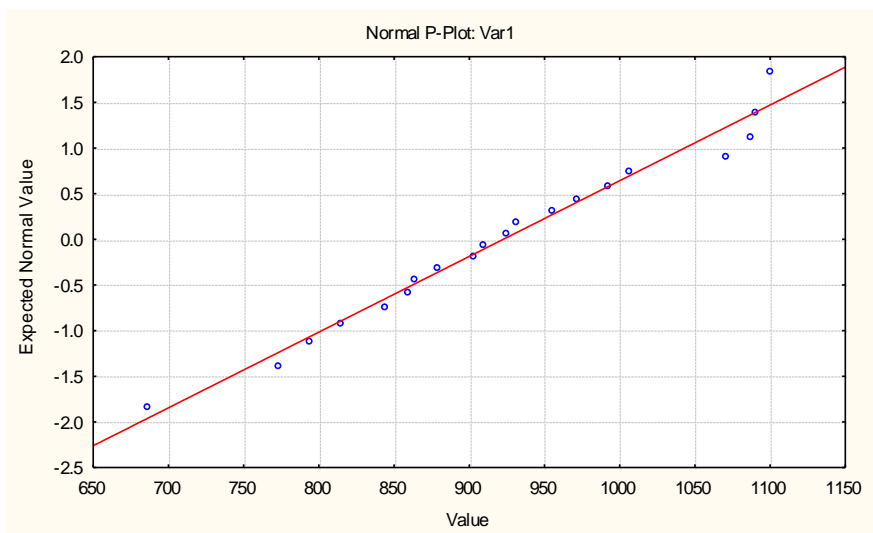


Рис. 3.2. Перевірка відповідності до нормального закону розподілу.

Контрольні запитання

1. Що називають часовим рядом? Рівні ряд.
2. Порядок аналізу часових рядів.
3. Які методи застосовують при дослідженні часових рядів?
4. Для чого використовують кореляційний та спектральний аналіз часових рядів?
5. Для чого призначені методи згладжування та фільтрації?
6. Методи авторегресії та ковзних середніх використовують для...
7. Які підходи існують до прогнозування часових рядів?
8. Адитивна модель часового ряду. Які параметри є її складовими? Які методи використовуються для оцінки параметрів адитивної моделі?
9. Поняття автокореляції. Автокореляційна функція. Ряд з довгою пам'яттю, ряд з короткою пам'яттю, циклічний ряд.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Оцінка якості трендової моделі часового ряду

Мета роботи. Набуття практичних навичок оцінки якості трендової моделі часового ряду врожайності зернових.

Завдання роботи. За даними, наведеними в додатку В, оцінити якість тренду часового ряду врожайності зернових.

Приклад розв'язування задачі.

1. Використовуючи результати розрахунків «Лабораторної роботи № 3» побудувати ряд залишків для найкращої моделі: $e_t = y_t - \hat{y}_t$, $t = 1..n$, $n = 56$.
2. Визначити середнє значення ряду залишків \bar{e} . **Якщо \bar{e} суттєво відмінне від нуля – модель є неадекватною.** Оцінка близькості до нуля виконується на основі t -критерію значимості. Якщо виконується умова $|t| < t_{kp}$, середнє значення можна вважати статистично близьким до нуля.

Тут $t = \bar{e} \cdot \frac{\sqrt{n}}{S_e}$; t_{kp} визначається за допомогою функції СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(α , $n-1$) або СТЬЮДРАСПОБР(α , $n-1$) при цьому $\alpha = 0,05$; $n = 56$. S_e – середньоквадратичне відхилення ряду

залишків визначається за формулою $S_e = \sqrt{S_e^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}}$.

3. Перевірити випадковість рівнів ряду залишків e_t на основі критерію поворотних точок. Кожен рівень ряду порівнюється з двома сусідніми (попереднім і наступним). Якщо він більше чи менше їх обох, то ця точка вважається поворотною. Підраховується кількість поворотних точок P . Підраховуються критичні значення

$$P_L = \left[\frac{2 \cdot (n-2)}{3} - 2\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right]; \quad P_U = \left[\frac{2 \cdot (n-2)}{3} + 2\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right].$$

Квадратні дужки означають, що від результату обчислень береться ціла частина числа. Якщо виконується нерівність $P_L < P < P_U$, **ряд залишків можна вважати випадковим**. Якщо виконується нерівність $P \leq P_L$, **ряд залишків вважають трендостійким**. Такий випадок є свідченням низької якості трендової моделі ряду. Якщо виконується нерівність $P \geq P_U$, **ряд залишків вважають реверсивним (коливним)**. Даний випадок свідчить про наявність циклічної компоненти у залишках ряду.

4. Перевірити відсутність автокореляції у ряду залишків e_t на основі критерію Дарбіна–Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N e_t^2}.$$

Обчислена величина цього критерію порівнюється з двома табличними рівнями (нижнім $d_L = 1,52$ і верхнім $d_U = 1,60$ при $n = 56$):

- ◆ якщо $0 < DW < d_L$ – це свідчить про **позитивну автокореляцію**;
- ◆ якщо $4 - d_L < DW < 4$ – це свідчить про **негативну автокореляцію**;
- ◆ якщо $d_U < DW < 4 - d_U$ – **автокореляція залишків відсутня**;
- ◆ якщо $d_L < DW < d_U$ або $4 - d_U < DW < 4 - d_L$ – **не можна дати однозначної відповіді** щодо наявності або відсутності автокореляції залишків.

5. Перевірити відповідність ряду залишків e_t нормальному закону розподілу (при $RS_L = 3,95$ та $RS_U = 5,87$). Найпростіше це зробити за допомогою RS-критерію

$$RS = \frac{e_{max} - e_{min}}{S},$$

де e_{max} – максимальне значення ряду залишків; e_{min} – мінімальне значення ряду залишків; S_e – середньоквадратичне відхилення значень ряду залишків.

Якщо розраховане значення RS потрапляє між верхньою та нижньою межею з заданим рівнем ймовірності, то гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

6. Зробити загальний висновок щодо виконання всіх чотирьох критеріїв та адекватності оцінюваної трендової моделі.

Контрольні запитання

1. Трендостійкі, реверсивні та випадкові часові ряди за Кендалом. Поняття поворотної точки ряду.
2. Прогнозування часових рядів методом ковзного середнього.
3. Прогнозування часових рядів методом експонентного згладжування.
4. Прогнозування часових рядів методом екстраполяції тренду.
5. Оцінка якості моделі часового ряду.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Задача про розміщення соціальних об'єктів на дорожній мережі

Мета роботи. Набуття практичних навичок розв'язування задачі про розміщення соціальних об'єктів на дорожній мережі.

Завдання роботи. Задана дорожня мережа (рис. 5.1), яка складається з дев'яти вершин, з'єднаних ребрами (додаток Д). Необхідно:

1. Побудувати матрицю найкоротших відстаней між пунктами мережі, використовуючи алгоритм Флойда, алгоритм Дейкстри, або ж метод перебору варіантів.
2. Використовуючи дані про кількість учнів у населених пунктах (вузлах мережі), знайти оптимальне місце для розташування школи та пожежної частини.

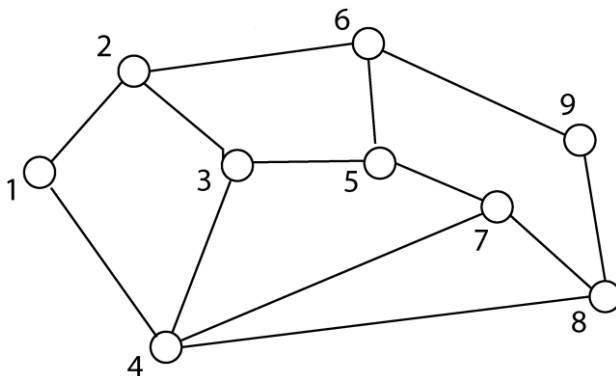


Рис. 5.1. Схема дорожньої мережі

Приклад розв'язування задачі

Задача про розміщення школи

У випадку, коли кількість вершин невелика для побудови матриці найкоротших відстаней можна використати *метод перебору варіантів*. Розглянемо суть цього методу на прикладі мережі, зображеної на рис. 5.2.

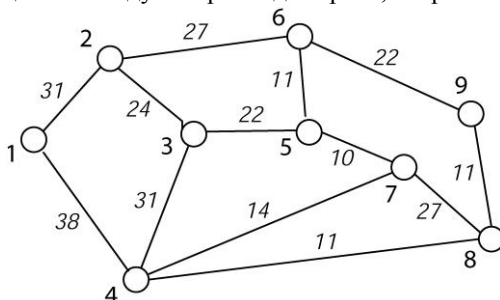


Рис. 5.2. Приклад схеми дорожньої мережі

Початковий вигляд матриці відстаней для цієї мережі представлений у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Початкова матриця відстаней

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	31	М	38	М	М	М	М	М
2	31	0	24	М	М	27	М	М	М
3	М	24	0	31	22	М	М	М	М
4	38	М	31	0	М	М	14	11	М
5	М	М	22	М	0	11	10	М	М
6	М	27	М	М	11	0	М	М	22
7	М	М	М	14	10	М	0	27	М
8	М	М	М	11	М	М	27	0	11
9	М	М	М	М	М	22	М	11	0

Метод перебору варіантів проілюструємо на прикладі відшукування найкоротших відстаней від вершини 1 до інших вершин мережі.

Найкоротші відстані до вершин 2 і 4 дорівнюють довжинам відповідних ребер, тобто 31 і 38. Для знаходження найкоротшої відстані до вершини 3 розглянемо два варіанти: маршрут 1 – 2 – 3 довжиною 55 і маршрут 1 – 4 – 3 довжиною 69. Вибираємо короткий, тобто 1 – 2 – 3 (довжина 55). Для знаходження найкоротшої відстані до вершини 5 розглянемо три варіанти: маршрут 1 – 2 – 3 – 5 довжиною 77; маршрут 1 – 2 – 6 – 5 довжиною 69 і маршрут 1 – 4 – 7 – 5 довжиною 62. Вибираємо короткий, тобто 1 – 4 – 7 – 5 (довжина 62). Маршрут 1 – 4 – 3 – 5 розглядати немає змісту, оскільки вже було показано, що маршрут 1 – 2 – 3 є оптимальнішим від маршруту 1 – 4 – 3. Найкоротший маршрут до вершини 6 наступний: 1 – 2 – 6 (довжина 58) і це очевидно. Найкоротший маршрут до вершини 7 наступний: 1 – 4 – 7 (довжина 52). Найкоротший маршрут до вершини 8: 1 – 4 – 8 (довжина 49). Для знаходження найкоротшої відстані до вершини 9 розглянемо два варіанти: маршрут 1 – 2 – 6 – 9 довжиною 80 і маршрут 1 – 4 – 8 – 9 довжиною 60. Вибираємо короткий, тобто 1 – 4 – 8 – 9 (довжина 60).

Аналогічним чином аналізуємо всі інші вершини. В результаті отримуємо матрицю найкоротших відстаней у вигляді табл. 5.2.

Приєднаємо справа до таблиці ще один стовпчик, у якому розмістимо дані про кількість учнів у населених пунктах. Приєднаємо знизу до таблиці ще один рядок, у якому розмістимо суму добутків кількості учнів у населених пунктах на найкоротші відстані до цих населених пунктів. Це число буде характеризувати суму відстаней, пройдених всіма учнями, у випадку розташування школи у даному населеному пункті. Аналіз останнього рядка показує, що найвигідніше розмістити школу у четвертому населеному пункті, оскільки сума у цьому випадку буде найменшою.

Таблиця 5.2

Матриця найкоротших відстаней

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	К-сть учнів
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	50
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	20
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	10
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	40
5	62	38	22	24	0	11	10	35	33	80
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	30
7	52	48	32	14	10	21	0	25	36	60
8	49	60	42	11	35	33	25	0	11	90
9	60	49	53	22	33	22	36	11	0	70
	21120	19550	16630	<u>9650</u>	11430	11820	10640	10570	11840	

Висновок. Найвигідніше розмістити школу у четвертому населеному пункті. Сума відстаней, пройдених всіма учнями при цьому буде мінімальною і становитиме 9650 кілометрів.

Задача про розміщення пожежної частини

В основу розв'язування задачі покладене наступне міркування: *відстань від пожежної частини до найбільш віддаленого пункту мережі повинна бути мінімальною*. Це міркування називають *принципом мінімаксу*, а саму задачу – *мінімаксною*. Аналогічно розв'язуються задачі про розміщення станції швидкої допомоги, служби охорони, тобто тих служб, час виклику яких повинен бути мінімальним. Розглянемо варіант, при якому пожежна частина розміщається у одному з населених пунктів (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Матриця найкоротших відстаней

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	max
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	62
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	60
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	55
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	55
5	62	38	22	24	0	11	10	35	33	62
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	58
7	52	48	32	14	10	21	0	25	36	<u>52</u>
8	49	60	42	11	35	33	25	0	11	60
9	60	49	53	22	33	22	36	11	0	60

Приєднаємо до неї справа ще один стовпчик і випишемо в ньому максимальні елементи кожного рядка. Вони відповідатимуть відстані до найбільш віддаленого пункту мережі (ми розглядаємо найгірший варіант) у випадку розташування пожежної частини у населеному пункті, номер якого відповідає номеру рядка матриці. Вибираємо мінімальний елемент серед всіх чисел доданого стовпця. У нашому випадку це число 52 (пункт 7).

Висновок. *Отже, якщо розміщувати пожежну частину у населеному пункті, то найбільш вигідно це зробити у населеному пункті 7. При цьому відстань до найбільш віддаленого пункту становитиме 52 кілометри.*

Контрольні запитання

1. Що вивчає теорія графів?
2. Чим граф відрізняється від звичайної геометричної фігури?
3. Дайте означення графу. Що називають порядком графу?
4. Які є способи задання графів?
5. Поняття інцидентності і суміжності між вершинами і ребрами графу.
6. Як будується матриця інцидентності орграфу.
7. Що називається маршрутом, ланцюгом, циклом у графі?
8. Чим орграф відрізняється від звичайного графа?
9. Що таке зв'язний граф?
10. Задачі про оптимальне розміщення соціальних об'єктів на дорожніх мережах. Алгоритм Флойда–Воршала.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Задача про найдешевшу дорожню мережу

Мета роботи. Набуття практичних навичок розв'язування задачі про найдешевшу дорожню мережу.

Завдання роботи. Дев'ять населених пунктів задані у прямокутній декартовій системі координат їх координатами X, Y (додаток Е). Необхідно:

1. Розрахувати матрицю відстаней між пунктами мережі (значення відстаней заокруглювати з точністю до десятих).
2. Використовуючи матрицю відстаней, згідно з алгоритмом Пріма-Краскала, запроектувати найдешевшу дорожню мережу (мінімальне покриваюче дерево графа). Побудувати план дорожньої мережі, вказавши номери населених пунктів і довжини з'єднуючих їх доріг. Вказати загальну довжину мережі.

Приклад розв'язування задачі

Розглянемо мережу, яка складається з дев'яти населених пунктів (вершин), заданих їхніми декартовими координатами на площині.

Таблиця 6.1

Вихідні дані

X	5	36	43	14	17	35	19	12	21
Y	29	24	11	28	8	38	23	39	12

Перший етап. Розрахуємо матрицю відстаней між вершинами. Перш за все врахуємо, що $d_{11} = d_{22} = d_{33} = \dots = d_{99} = 0$. Крім того, слід мати на увазі, що матриця відстаней – симетрична. Отже, нам необхідно вирахувати $9 \cdot 8 / 2 = 36$ відстаней

$$d_{12} = \sqrt{(5-36)^2 + (29-24)^2} = 31,4;$$

$$d_{13} = \sqrt{(5-43)^2 + (29-11)^2} = 42,0;$$

.....

$$d_{89} = \sqrt{(12-21)^2 + (39-12)^2} = 28,5.$$

В результаті виконаних розрахунків отримуємо матрицю відстаней у вигляді табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Матриця відстаней

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	31,4	42,0	9,1	24,2	31,3	15,2	12,2	23,3
2	31,4	0	14,8	22,4	24,8	14,0	17,0	28,3	19,2
3	42,0	14,8	0	33,6	26,2	28,2	26,8	41,8	22,0
4	9,1	22,4	33,6	0	20,2	23,3	7,1	11,2	17,5
5	24,2	24,8	26,2	20,2	0	35,0	15,1	31,4	5,7
6	31,3	14,0	28,2	23,3	35,0	0	21,9	23,0	29,5
7	15,2	17,0	26,8	7,1	15,1	21,9	0	17,5	11,2
8	12,2	28,3	41,8	11,2	31,4	23,0	17,5	0	28,5
9	23,3	19,2	22,0	17,5	5,7	29,5	11,2	28,5	0

Другий етап. Застосовуємо алгоритм Пріма–Краскала (жадібний алгоритм). Він має наступний вигляд.

1. Вибираємо ще не розглянуте ребро мінімальної довжини. У нашому випадку це ребро d_{59} (рис. 6.1). Обводимо кружечком дане число у матриці відстаней (помічаємо розглянуте ребро).

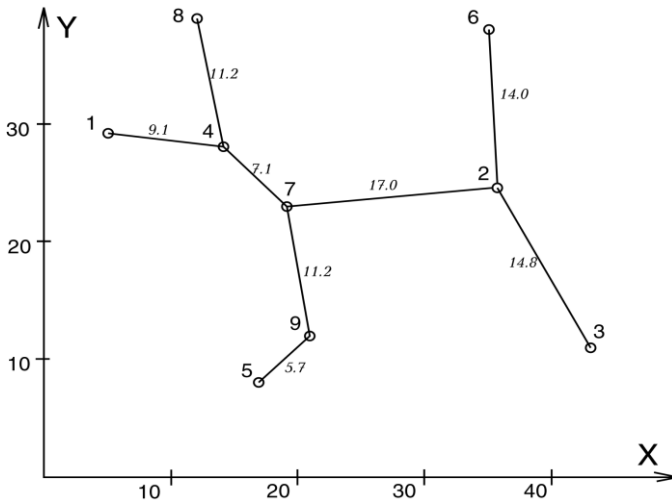


Рис. 6.1. Схема найкоротшої дорожньої мережі для задачі Пріма

2. Приєднуємо розглянуте ребро d_{59} до раніше вибраних ребер при умові, що при цьому не утвориться цикл. Сполучаємо на схемі відповідні вершини. Повертаємось до пункту 1.

В результаті перегляду всіх ребер (достатньо переглянути лише ту частину матриці відстаней, яка знаходиться над головною діагоналлю) із застосуванням алгоритму Пріма–Краскала ми отримаємо мінімальне покриваюче дерево для розглядуваного графа, або, іншими словами, найдешевшу дорожню мережу для даної системи населених пунктів.

Висновок. Побудована найкоротша дорожня мережа загальною довжиною $L=90,1$ кілометра.

Контрольні запитання

1. Який граф називається деревом?
2. Поняття покриваючого дерева графа.
3. Що називають мережею в теорії графів?
4. Довжина маршруту (шляху) у графі.
5. Алгоритм Дейкстри визначення довжини найкоротшого шляху від фіксованої вершини графу до будь-якої іншої.
6. Алгоритм Пріма–Краскала побудови покриваючого дерева мінімальної довжини.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Мета роботи. Набуття практичних навичок прийняття рішень в умовах невизначеності.

Завдання роботи. Навколишнє середовище може перебувати в наступних станах: C_1 – дуже активний стан економіки, C_2 – активний стан економіки, C_3 – середній за активністю стан економіки, C_4 – малоактивний стан економіки, C_5 – дуже малоактивний стан економіки (додаток Ж1). Стратегії особи, яка приймає рішення (ОПР), полягають у виборі розміру інвестицій в деяке підприємство: S_1 – кошти не інвестуються; S_2 – інвестується 50% планових коштів; S_3 – повна планова інвестиція.

Вибираючи одну із можливих стратегій, ОПР отримус в результаті деякий фінансовий виграш (програш), величина якого залежить від стану навколишнього середовища. В залежності від ситуації, інформація про імовірності стану економіки може бути відомою, або ж невідомою (додаток Ж2).

Необхідно надати рекомендації щодо вибору оптимальної стратегії використовуючи критерії Байєса, мінімальної дисперсії, Вальда, Севіджа, Гурвіца (при $\lambda = 0,5$) та Бернуллі–Лапласа. Зробити окремі висновки по кожному критерію а, також, загальний висновок щодо оптимальної стратегії підприємця.

Приклад розв’язування задачі

За вихідними даними заповнюється розрахункова таблиця 7.1. Для цього визначаються значення відповідних критеріїв:

- критерії Байєса $F_{Bi} = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot p_j \rightarrow \max$;
- критерій мінімальної дисперсії $F_{mdi} = \sum_{j=1}^N [F_{ij} - F_{bi}]^2 \cdot p_j \rightarrow \min$;
- критерій Вальда $F_{Wi} = \max_j F_{ij} \rightarrow \max$;
- критерій Севіджа $F_{Si} = \max_j R_{ij} \rightarrow \min$;
- критерій Гурвіца $F_{Hi} = \left[\lambda \min_j F_{ij} + (1 - \lambda) \max_j F_{ij} \right] \rightarrow \max$;

- критерій Бернуллі–Лапласа $F_{BLi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{ij} \rightarrow \max$.

Таблиця 7.1

Матриця виграшів та імовірностей станів

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	F_{B_i}	F_{md_i}	F_{W_i}	F_{S_i}	F_{H_i}	F_{BL_i}
S_1	50	70	110	130	110	96	724	50	60	90	94
S_2	80	110	120	90	60	101	369	60	50	90	92
S_3	100	130	110	80	60	104	524	60	50	95	96
P	0,10	0,30	0,30	0,20	0,10	—	—	—	—	—	—

Висновок. Оптимальною стратегією є стратегія S_3 .

Контрольні запитання

1. У чому полягає класична задача прийняття рішень за умов невизначеності?
2. Поняття матричної гри з «природою».
3. В чому відмінність інформаційних ситуацій першого, другого, третього та четвертого типу у математичних моделях теорії ігор?
4. Які критерії прийняття рішень в умовах невизначеності застосовуються у випадку першої інформаційної ситуації?
5. Порівняйте критерії Байеса і мінімальної дисперсії.
6. Які критерії прийняття рішень в умовах невизначеності застосовуються у випадку інформаційної ситуації другого типу?
7. Порівняйте критерії Вальда і Севіджа.
8. Які критерії прийняття рішень в умовах невизначеності застосовуються у випадку інформаційної ситуації третього типу?
9. В чому полягає суть критерія Гурвіца?
10. Який критерій прийняття рішень застосовують у випадку повної невизначеності?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Дослідження стійкості нелінійної динамічної системи

Мета роботи. Набуття практичних навичок дослідження стійкості нелінійної динамічної системи.

Завдання роботи. Нелінійна динамічна система задана системою диференціальних рівнянь (додаток И)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y). \end{cases}$$

де $a(x, y)$, $b(x, y)$ – нелінійні функції.

Необхідно:

1. Знайти стаціонарні точки системи. Дослідити одну із стаціонарних точок на стійкість.
2. Побудувати характеристичний визначник та характеристичне рівняння системи.
3. Розв'язати характеристичне рівняння. Зробити висновок про характер динаміки системи.

Приклад розв'язування задачі

Нелінійна динамічна система задана системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y; \\ \frac{dy}{dt} = x + y + x^2. \end{cases}$$

Для знаходження координат стаціонарної точки складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 0; \\ x + y + x^2 = 0. \end{cases}$$

Система має два наступних розв'язки: $(x_1 = 0; y_1 = 0)$ та $\left(x_2 = -\frac{4}{3}; y_2 = -\frac{8}{3}\right)$, які описують стаціонарні точки системи. Дослідимо

першу стаціонарну точку. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -3; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = 1 + 2x; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 1.$$

Для стаціонарної точки $(x_1 = 0; y_1 = 0)$ матриця частинних похідних має наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будуємо характеристичний визначник і характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0.$$

Детермінант рівняння $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$.

Отже корені є комплексні і мають наступний вигляд: $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{3}$ та $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Висновок. *Оскільки дійсна частина коренів $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 1 > 0$, досліджувана стаціонарна точка відповідає нестійкому руху системи. Стаціонарна точка такого роду є нестійким фокусом.*

Контрольні запитання

1. Поняття динамічної системи. Моделювання динамічних систем.
2. Яка мета моделювання динамічних систем?
3. Що таке детермінована динамічна система?
4. Модель динаміки популяції (модель Мальтуса). Припущення моделі.
5. Наведіть приклади систем, динаміку яких можна змодельовати на основі моделі популяції Мальтуса.
6. Модель Вольтерра «хижак–жертва». Припущення моделі.
7. Який фізичний (економічний) сенс мають параметри системи Вольтерра–Лотки (моделі «хижак–жертва»)?
8. Як визначається стаціонарна точка процесу, що описується моделлю «хижак–жертва», і який її зміст?
9. Формальний опис стану динамічної системи включає в себе...
10. Рівновага та стійкість системи.
11. Визначення стійкості системи за Ляпуновим. Яка система називається стійкою, асимптотично стійкою і нестійкою?
12. Схема дослідження на стійкість двовимірної системи. Умови стійкості.
13. Класифікація точок рівноваги двовимірної системи за коренями характеристичного рівняння лінеаризованої системи.

Література

1. Шарапов О. Д., Дербенцев В. Д., Семьонов Д. Є. Системний аналіз. К. : КНЕУ, 2003. 154 с.
2. Сорока К. О. Основи теорії систем і системного аналізу : навч. пос. Харків: ХНАМГ, 2004. 291 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Варіанти вихідних даних до лабораторної роботи № 1

N	Новий двигун			Двигун БВ			Річні експлуатаційні витрати	
	1-ий рік	2-ий рік	3-ий рік	1-ий рік	2-ий рік	3-ий рік	новий двигун	двигун б/в
1	0	0,11	0,51	0,21	0,51	0,85	310+K	400+K
2	0	0,12	0,52	0,22	0,52	0,86	320+K	410+K
3	0	0,13	0,53	0,23	0,53	0,87	330+K	420+K
4	0	0,14	0,54	0,24	0,54	0,88	340+K	430+K
5	0	0,15	0,55	0,25	0,55	0,89	350+K	440+K
6	0	0,16	0,56	0,26	0,56	0,90	360+K	450+K
7	0	0,17	0,57	0,27	0,57	0,91	370+K	460+K
8	0	0,18	0,58	0,28	0,58	0,92	380+K	470+K
9	0	0,19	0,59	0,29	0,59	0,93	390+K	480+K
10	0	0,20	0,60	0,30	0,60	0,94	400+K	490+K
11	0	0,12	0,51	0,21	0,51	0,85	310+K	390+K
12	0	0,13	0,52	0,22	0,52	0,86	320+K	400+K
13	0	0,14	0,53	0,23	0,53	0,87	330+K	410+K
14	0	0,15	0,54	0,24	0,54	0,88	340+K	420+K
15	0	0,16	0,55	0,25	0,55	0,89	350+K	430+K
16	0	0,17	0,56	0,26	0,56	0,90	360+K	440+K
17	0	0,18	0,57	0,27	0,57	0,91	370+K	450+K
18	0	0,19	0,58	0,28	0,58	0,92	380+K	460+K
19	0	0,20	0,59	0,29	0,59	0,93	390+K	470+K
20	0	0,21	0,60	0,30	0,60	0,94	400+K	480+K
21	0	0,11	0,51	0,21	0,51	0,85	300+K	400+K
22	0	0,12	0,52	0,22	0,52	0,86	310+K	410+K
23	0	0,13	0,53	0,23	0,53	0,87	320+K	420+K
24	0	0,14	0,54	0,24	0,54	0,88	330+K	430+K
25	0	0,15	0,55	0,25	0,55	0,89	340+K	440+K
26	0	0,16	0,56	0,26	0,56	0,90	350+K	450+K
27	0	0,17	0,57	0,27	0,57	0,91	360+K	460+K
28	0	0,18	0,58	0,28	0,58	0,92	370+K	470+K
29	0	0,19	0,59	0,29	0,59	0,93	380+K	480+K
30	0	0,20	0,60	0,30	0,60	0,94	390+K	490+K

Варіанти вихідних даних до лабораторної роботи № 2

i	Номер варіанта					
	1		2		3	
	y	x	y	x	y	x
1	803+K	1080	627+K	781	671+K	832
2	759+K	1056	781+K	968	682+K	879
3	792+K	1054	726+K	1009	693+K	872
4	792+K	1041	836+K	1184	781+K	981
5	715+K	946	770+K	960	715+K	959
6	737+K	1040	748+K	968	770+K	951
7	616+K	761	814+K	1139	770+K	1045
8	770+K	975	748+K	1001	693+K	874
9	693+K	940	759+K	1000	803+K	1087
10	704+K	965	781+K	1038	748+K	1009
11	770+K	1074	660+K	851	649+K	951
12	737+K	943	616+K	859	704+K	950
13	660+K	925	781+K	1018	869+K	1161
14	693+K	984	748+K	920	847+K	1075
15	880+K	1143	726+K	938	858+K	1190
16	781+K	974	660+K	878	726+K	889
17	814+K	1113	770+K	1098	693+K	955
18	748+K	936	759+K	967	759+K	972
19	715+K	978	792+K	1087	814+K	1094
20	748+K	1008	671+K	898	726+K	904
i	Номер варіанта					
	4		5		6	
	y	x	y	x	y	x
1	748+K	1028	704+K	928	737+K	1094
2	682+K	993	682+K	904	748+K	1023
3	775+K	950	726+K	982	770+K	1168
4	770+K	942	770+K	1012	836+K	1312

5	715+K	919	715+K	989	880+K	1226
6	764+K	1053	770+K	1103	957+K	1365
7	693+K	882	726+K	1008	825+K	1211
8	693+K	911	693+K	976	869+K	1249
9	737+K	1039	770+K	1068	869+K	1302
10	748+K	952	748+K	1067	803+K	1217
11	605+K	825	627+K	911	946+K	1459
12	616+K	782	660+K	959	858+K	1236
13	638+K	891	748+K	954	869+K	1256
14	770+K	1035	803+K	1137	737+K	1059
15	649+K	841	748+K	1037	759+K	1166
16	748+K	1091	737+K	998	803+K	1155
17	759+K	987	726+K	998	814+K	1157
18	693+K	937	726+K	993	814+K	1128
19	756+K	1033	792+K	1126	913+K	1298
20	715+K	1047	715+K	978	902+K	1397
i	Номер варіанта					
	7		8		9	
	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
1	902+K	1314	858+K	1288	990+K	1392
2	770+K	1192	825+K	1272	1045+K	1565
3	913+K	1350	902+K	1322	968+K	1485
4	880+K	1338	935+K	1301	946+K	1436
5	836+K	1185	748+K	1144	781+K	1197
6	891+K	1318	792+K	1110	957+K	1464
7	880+K	1298	781+K	1180	847+K	1211
8	836+K	1225	792+K	1141	803+K	1213
9	770+K	1196	748+K	1175	902+K	1392
10	869+K	1366	946+K	1421	814+K	1172
11	814+K	1171	935+K	1434	737+K	1077
12	847+K	1254	781+K	1134	902+K	1277

13	715+K	1022	792+K	1107	792+K	1184
14	880+K	1370	836+K	1166	814+K	1274
15	858+K	1225	847+K	1275	847+K	1204
16	858+K	1218	803+K	1211	924+K	1390
17	770+K	1129	825+K	1263	803+K	1151
18	890+K	1364	935+K	1418	880+K	1267
19	869+K	1262	836+K	1254	847+K	1258
20	847+K	1342	781+K	1124	858+K	1341
i	Номер варіанта					
	10		11		12	
	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
1	660+K	368	847+K	1118	616+K	807
2	528+K	310	704+K	998	726+K	1130
3	429+K	244	781+K	1040	693+K	982
4	308+K	165	748+K	1027	825+K	1150
5	495+K	227	726+K	989	814+K	1015
6	407+K	198	737+K	1016	737+K	975
7	638+K	354	594+K	821	836+K	1134
8	297+K	123	814+K	986	704+K	984
9	638+K	323	682+K	863	770+K	961
10	517+K	207	737+K	898	825+K	990
11	418+K	195	715+K	1091	605+K	750
12	484+K	248	682+K	1008	616+K	790
13	253+K	149	660+K	898	737+K	978
14	627+K	307	671+K	925	693+K	978
15	418+K	228	858+K	1169	671+K	902
16	517+K	288	792+K	1060	627+K	822
17	418+K	216	781+K	1122	809+K	1063
18	484+K	264	693+K	931	726+K	1063
19	253+K	154	671+K	882	814+K	1011
20	627+K	195	704+K	945	704+K	891

i	Номер варіанта					
	13		14		15	
	y	x	y	x	y	x
1	704+K	934	759+K	1056	660+K	867
2	649+K	902	682+K	998	638+K	823
3	682+K	889	726+K	1026	726+K	890
4	803+K	1022	759+K	1017	770+K	1038
5	660+K	890	693+K	911	726+K	1050
6	726+K	1044	748+K	996	726+K	946
7	814+K	972	726+K	924	748+K	923
8	682+K	926	693+K	905	715+K	888
9	811+K	1086	781+K	1041	792+K	1101
10	704+K	961	759+K	1036	693+K	1064
11	671+K	939	550+K	808	660+K	845
12	715+K	1016	616+K	862	616+K	760
13	814+K	1057	682+K	920	819+K	1144
14	847+K	1117	748+K	1053	814+K	1064
15	825+K	1087	616+K	845	693+K	869
16	737+K	959	770+K	951	737+K	980
17	726+K	1031	759+K	946	682+K	967
18	704+K	928	715+K	893	718+K	933
19	820+K	1155	803+K	1108	836+K	1120
20	748+K	958	748+K	972	737+K	1024
i	Номер варіанта					
	16		17		18	
	y	x	y	x	y	x
1	770+K	1075	880+K	1359	825+K	1343
2	792+K	1142	748+K	1109	847+K	1200
3	737+K	1050	869+K	1351	913+K	1324
4	814+K	1234	930+K	1345	902+K	1355
5	836+K	1294	847+K	1166	792+K	1109

6	924+K	1451	891+K	1307	737+K	1104
7	781+K	1145	836+K	1242	770+K	1079
8	814+K	1280	803+K	1190	792+K	1091
9	869+K	1320	792+K	1171	781+K	1103
10	748+K	1206	847+K	1354	990+K	1368
11	945+K	1387	836+K	1208	913+K	1427
12	803+K	1200	814+K	1232	825+K	1232
13	836+K	1316	737+K	1070	770+K	1168
14	781+K	1117	902+K	1323	869+K	1168
15	792+K	1206	869+K	1261	792+K	1196
16	748+K	1240	803+K	1341	781+K	-290
17	803+K	1253	737+K	1090	847+K	1154
18	847+K	1294	935+K	1380	902+K	1308
19	935+K	1350	847+K	1267	858+K	1341
20	869+K	1312	792+K	1089	792+K	1127
i	Номер варіанта					
	19		20		21	
	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
1	979+K	1435	682+K	1120	792+K	1139
2	1040+K	1541	484+K	956	737+K	1036
3	957+K	1342	429+K	845	803+K	1178
4	924+K	1426	275+K	748	693+K	967
5	726+K	1173	473+K	925	682+K	900
6	946+K	1381	363+K	820	748+K	1019
7	836+K	1320	605+K	1198	627+K	856
8	781+K	1276	286+K	675	781+K	1040
9	924+K	1299	638+K	1056	682+K	947
10	825+K	1243	473+K	856	726+K	1011
11	748+K	1090	407+K	890	682+K	968
12	847+K	1281	473+K	945	708+K	962
13	836+K	1199	242+K	769	649+K	865
14	759+K	1179	638+K	1007	638+K	843

15	847+K	1274	374+K	856	880+K	1214
16	902+K	1442	517+K	967	825+K	1124
17	748+K	1091	429+K	854	781+K	1047
18	858+K	1230	473+K	890	660+K	1024
19	818+K	1158	253+K	732	649+K	904
20	902+K	1188	616+K	990	660+K	1039
i	Номер варіанта					
	22		23		24	
	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
1	660+K	824	715+K	893	781+K	999
2	770+K	1095	682+K	944	726+K	960
3	726+K	980	627+K	805	682+K	990
4	803+K	1029	792+K	987	737+K	984
5	847+K	1197	627+K	945	737+K	947
6	682+K	920	682+K	910	781+K	1090
7	880+K	1234	825+K	1102	726+K	981
8	748+K	914	671+K	889	660+K	855
9	792+K	1007	792+K	1101	825+K	1145
10	825+K	1004	715+K	968	715+K	930
11	638+K	845	616+K	834	542+K	770
12	572+K	804	682+K	995	616+K	789
13	759+K	1003	858+K	1245	715+K	820
14	671+K	856	792+K	1054	792+K	942
15	638+K	945	781+K	1148	627+K	805
16	671+K	852	770+K	974	803+K	1040
17	814+K	1080	715+K	1008	704+K	940
18	693+K	1071	704+K	990	737+K	873
19	759+K	988	847+K	1221	836+K	1180
20	704+K	965	792+K	1021	737+K	931

i	Номер варіанта					
	25		26		27	
	y	x	y	x	y	x
1	605+K	903	770+K	995	780+K	990
2	638+K	857	803+K	1169	902+K	1200
3	715+K	936	682+K	840	847+K	1180
4	715+K	1086	792+K	1150	825+K	1170
5	682+K	964	840+K	1380	814+K	1261
6	693+K	959	710+K	945	750+K	960
7	726+K	991	803+K	1299	869+K	1220
8	682+K	938	792+K	1193	710+K	890
9	759+K	1014	690+K	880	814+K	1204
10	660+K	917	759+K	1040	836+K	1180
11	638+K	820	820+K	1180	781+K	1100
12	649+K	837	880+K	1327	781+K	1207
13	781+K	1120	720+K	980	682+K	840
14	858+K	1240	792+K	1003	913+K	1296
15	726+K	965	836+K	1182	880+K	1190
16	693+K	910	693+K	950	792+K	970
17	671+K	1015	847+K	1262	726+K	1115
18	760+K	1050	792+K	1208	768+K	1020
19	836+K	1167	860+K	1322	950+K	1240
20	737+K	982	713+K	1067	770+K	1040
i	Номер варіанта					
	28		29		30	
	y	x	y	x	y	x
1	781+K	1180	760+K	1170	440+K	390
2	847+K	1300	730+K	1100	451+K	425
3	700+K	1056	610+K	900	451+K	440
4	935+K	1340	880+K	1461	275+K	330
5	836+K	1126	682+K	1232	473+K	425

6	720+K	930	809+K	1100	374+K	330
7	803+K	1230	858+K	1222	638+K	540
8	759+K	1160	803+K	1223	340+K	310
9	814+K	1245	690+K	960	450+K	420
10	765+K	1198	781+K	1196	429+K	440
11	869+K	1230	781+K	1180	363+K	267
12	810+K	1200	825+K	1341	506+K	540
13	690+K	990	869+K	1273	310+K	290
14	858+K	1171	803+K	1146	605+K	610
15	740+K	1120	836+K	1243	407+K	380
16	759+K	945	600+K	820	473+K	430
17	891+K	1290	770+K	1087	385+K	290
18	680+K	840	730+K	1040	473+K	470
19	858+K	1250	847+K	1290	340+K	320
20	740+K	980	880+K	1310	402+K	410

Додаток В

Врожайність зернових (ц/га)

i	Номер варіанта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	19,4+s	20,1+s	21,9+s	17,5+s	14,6+s	21,3+s	18,4+s	15,9+s	15+s	16,6+s
2	10,5+s	11,8+s	14,5+s	11,6+s	7,9+s	9,6+s	18,2+s	17,6+s	12+s	12,2+s
3	16,3+s	16,8+s	18+s	20,2+s	18,9+s	18,7+s	23,7+s	20,1+s	17,7+s	17,6+s
4	18,4+s	16,6+s	19,4+s	20,7+s	19+s	19,8+s	22,3+s	20,5+s	17,7+s	17,3+s
5	19,1+s	18,8+s	19+s	21,6+s	22,9+s	17,7+s	22,7+s	17,8+s	20+s	18,3+s
6	16,4+s	16,5+s	17,8+s	21,5+s	13,8+s	15,1+s	19,9+s	21,4+s	17,8+s	17,1+s
7	19,1+s	18,2+s	24,9+s	26,6+s	23,1+s	23,9+s	26,6+s	22,1+s	17,3+s	21,5+s
8	19,5+s	18,5+s	17,1+s	20,4+s	20,1+s	17,4+s	20,8+s	15,1+s	16,4+s	17,2+s
9	11,6+s	14,6+s	10,5+s	15,7+s	14,7+s	14,4+s	10,3+s	12,7+s	13,5+s	13,9+s
10	12,2+s	16,8+s	15,2+s	14,9+s	14,5+s	11,4+s	22,9+s	20,9+s	14,3+s	16,6+s

11	18,1+s	16,7+s	17,5+s	28,4+s	29,9+s	21,7+s	16+s	13,8+s	24,2+s	20,8+s
12	26,7+s	26+s	24,9+s	29+s	30+s	25,1+s	22,9+s	21,9+s	23,3+s	24,3+s
13	21,1+s	25,7+s	23,6+s	26+s	22,2+s	23,2+s	22,4+s	20,5+s	23,5+s	22,6+s
14	18,9+s	20,6+s	20,7+s	21,4+s	23+s	19,2+s	25,5+s	20,9+s	19,3+s	20+s
15	21,9+s	23,9+s	19+s	31,3+s	26,5+s	28,2+s	16,9+s	20,6+s	24,3+s	22,8+s
16	27,8+s	31,4+s	24,3+s	26,3+s	21+s	26,9+s	28,4+s	27,9+s	27,3+s	25,3+s
17	31,9+s	30,1+s	31,7+s	37,8+s	29,6+s	37,1+s	23,5+s	28+s	30,3+s	29,2+s
18	24,1+s	19,8+s	17,2+s	34,2+s	28,3+s	27+s	18+s	17,3+s	27,9+s	24,7+s
19	31+s	34,5+s	32,9+s	39,4+s	32,8+s	33,4+s	35,4+s	34,1+s	31,2+s	31,1+s
20	33,5+s	35,5+s	32,6+s	37,8+s	32,7+s	33,2+s	35,7+s	36,5+s	27,6+s	30,7+s
21	23,1+s	23,7+s	19,1+s	31,3+s	29+s	23,6+s	23,8+s	21,8+s	24,2+s	22,3+s
22	28,5+s	27,6+s	29,4+s	41,7+s	33,6+s	29,3+s	27,4+s	25,7+s	23,5+s	29,9+s
23	27,9+s	34,9+s	31,2+s	38,7+s	35,3+s	32,9+s	31,2+s	33,2+s	32+s	31+s
24	30,3+s	33,7+s	34,5+s	44,2+s	38,6+s	36,2+s	36,4+s	33,5+s	33,7+s	33,9+s
25	22,9+s	25,2+s	22+s	34,2+s	29+s	27,7+s	21,7+s	23,3+s	27+s	24,9+s
26	23,1+s	27,5+s	28,6+s	30,3+s	25,9+s	29,2+s	26+s	28,6+s	22,1+s	25,6+s
27	26+s	29,1+s	26,2+s	35,4+s	29,4+s	29,7+s	29+s	27,6+s	26,6+s	26,4+s
28	23,3+s	24,2+s	28,6+s	37,3+s	28,5+s	27,1+s	32,5+s	28,9+s	24,8+s	27,8+s
29	18,5+s	21+s	23,7+s	30,6+s	30+s	20,7+s	31+s	20,9+s	17,8+s	25,6+s
30	24,7+s	30,2+s	26,2+s	31,4+s	30,7+s	26,1+s	31,5+s	31,8+s	27+s	27,6+s
31	21,3+s	17,7+s	18,2+s	35,2+s	29,5+s	23,1+s	24,7+s	21,8+s	21,6+s	24,7+s
32	29,9+s	34,5+s	27,6+s	40,8+s	36,7+s	29+s	31+s	31,8+s	28,9+s	32,1+s
33	30,6+s	29,4+s	37,8+s	49,6+s	43,8+s	33,6+s	36,1+s	34,8+s	26,6+s	36,7+s
34	38,3+s	32,7+s	34,3+s	44,4+s	35,8+s	37,2+s	32,5+s	35,8+s	35,9+s	33,6+s
35	38,7+s	40,8+s	39,8+s	48,1+s	44,2+s	39,1+s	39,2+s	40,4+s	33,4+s	39,3+s
36	39,3+s	37,2+s	45,1+s	46,6+s	40,7+s	43,7+s	43,4+s	42,3+s	33,7+s	40,1+s
37	29,1+s	28,6+s	32,9+s	32,9+s	30,5+s	29,3+s	30,7+s	29,2+s	32,2+s	30,3+s
38	29,2+s	30,2+s	31,3+s	38,2+s	34,3+s	32,3+s	32,0+s	30,8+s	29,8+s	30,9+s
39	35,8+s	37,1+s	38,4+s	47,0+s	42,1+s	39,7+s	39,4+s	37,9+s	36,6+s	38+s
40	29,1+s	30,1+s	31,2+s	38,1+s	34,2+s	32,2+s	31,9+s	30,7+s	29,7+s	30,8+s
41	29,3+s	30,1+s	25,9+s	37,9+s	34,6+s	31,6+s	27,5+s	25,2+s	27,1+s	29,7+s
42	18+s	16,8+s	23,1+s	34,1+s	31,9+s	23,5+s	24,7+s	18,5+s	19+s	23+s
43	25,6+s	29,6+s	29,3+s	34,7+s	27,5+s	28,2+s	26,1+s	30,9+s	34,4+s	28,2+s

44	19,6+s	25,7+s	29,4+s	37,7+s	35,7+s	27,7+s	25,8+s	26,7+s	24,7+s	26,5+s
45	24,2+s	23,5+s	22,7+s	23,7+s	24,1+s	24,4+s	20,9+s	25,3+s	26,9+s	22,9+s
46	16,4+s	18,8+s	16,5+s	24,7+s	26+s	18,2+s	14,9+s	17,1+s	19,5+s	19,8+s
47	33,2+s	30+s	43+s	37,3+s	29,7+s	41,9+s	38,1+s	34,8+s	34,3+s	31+s
48	28,6+s	24,1+s	36,5+s	34,9+s	32,1+s	38,2+s	31,9+s	27,9+s	31,1+s	30,5+s
49	6+s	6,2+s	8+s	13,5+s	22+s	7,5+s	10,7+s	9,4+s	6,4+s	14,7+s
50	33,5+s	29,8+s	35,8+s	36,9+s	36,2+s	37,7+s	32+s	31+s	34,7+s	31,7+s
51	22,3+s	24,5+s	34,8+s	36+s	34,8+s	32,8+s	31,3+s	30,2+s	24,1+s	28,5+s
52	26,2+s	25,4+s	28,7+s	30,4+s	27,5+s	30,0+s	23,6+s	28,6+s	25,2+s	25,3+s
53	14,9+s	18,5+s	19,6+s	28,4+s	27,3+s	20,6+s	24,5+s	21,8+s	17,9+s	23,4+s
54	31,7+s	34,0+s	38,4+s	45,6+s	42,4+s	39,8+s	36,1+s	34,3+s	32,5+s	36,7+s
55	29,5+s	24,4+s	29,8+s	45,2+s	36,8+s	31+s	28,6+s	28,3+s	26,4+s	30,9+s
56	28,5+s	24,2+s	28,5+s	35+s	24,9+s	30,1+s	29,8+s	26,1+s	28,3+s	26,8+s

Примітка. До вихідних даних необхідно додати сталу s , яка визначається за формулою: $s = K + 0,01 \cdot N$.

Додаток Д

Відстані між вершинами

N	d ₁₂	d ₁₄	d ₂₃	d ₂₆	d ₃₄	d ₃₅	d ₄₇	d ₄₈	d ₅₆	d ₅₇	d ₆₉	d ₇₈	d ₈₉
1	10	26	39	26	16	17	15	23	15	36	14	16	14
2	36	24	31	35	31	18	20	12	13	23	36	17	33
3	11	34	31	26	23	36	10	28	13	13	38	31	16
4	20	14	24	10	20	18	12	36	21	14	36	36	12
5	35	13	16	38	39	26	13	38	28	14	38	12	11
6	23	18	11	37	28	35	20	37	23	36	34	33	13
7	19	39	38	33	27	36	31	17	16	33	30	36	37
8	13	31	29	10	17	10	29	11	36	26	25	32	27
9	31	34	24	28	39	18	20	39	26	35	35	36	17
10	31	31	28	12	38	38	37	19	29	16	36	39	18
11	28	12	30	29	39	30	33	31	18	14	27	26	19
12	25	25	34	30	31	23	13	20	27	15	27	12	30
13	12	25	17	11	29	24	31	15	34	38	11	39	30
14	19	15	38	38	14	14	36	24	15	22	24	23	22
15	35	28	19	28	37	11	39	16	30	22	37	21	15
16	15	36	23	25	36	23	20	23	22	20	37	30	36
17	17	20	17	35	35	13	18	29	24	22	10	34	15

18	27	32	34	33	22	26	13	24	10	21	25	24	31
19	14	15	32	24	19	26	20	11	13	39	20	27	18
20	38	20	12	19	14	18	23	20	15	26	33	34	23
21	14	15	13	11	29	18	15	27	23	26	17	11	24
22	31	38	24	27	31	22	14	11	11	10	22	27	11
23	15	29	39	25	16	18	22	27	14	34	15	10	35
24	16	11	17	38	13	38	17	37	10	37	35	34	33
25	33	26	31	16	29	26	29	20	14	10	24	13	10
26	17	24	17	33	24	36	26	37	26	39	32	16	19
27	29	19	25	28	24	16	39	17	35	24	36	29	38
28	32	17	38	39	11	27	13	39	13	25	32	14	29
29	29	38	17	37	39	18	10	39	19	35	24	20	12
30	37	15	18	24	21	20	31	15	18	17	11	36	11

Примітка. Кількість учнів у населених пунктах визначити за формулами, де K – номер групи:

1. Населений пункт 1: $k_1 = 10 + K$;
2. Населений пункт 2: $k_2 = 30 + K$;
3. Населений пункт 3: $k_3 = 50 + K$;
4. Населений пункт 4: $k_4 = 70 + K$;
5. Населений пункт 5: $k_5 = 90 + K$;
6. Населений пункт 6: $k_6 = 20 + K$;
7. Населений пункт 7: $k_7 = 40 + K$;
8. Населений пункт 8: $k_8 = 60 + K$;
9. Населений пункт 9: $k_9 = 80 + K$.

Додаток Е

Координати населених пунктів

N \ i	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	5+K	6+K	43+K	14+K	17+K	35+K	19+K	12+K	21+K
	y	19	6	21	6	34	6	14	37	31
2	x	19+K	36+K	42+K	37+K	18+K	12+K	19+K	25+K	16+K
	y	33	14	21	9	14	31	39	21	4
3	x	11+K	11+K	27+K	5+K	31+K	5+K	39+K	34+K	39+K
	y	29	24	11	28	25	38	27	39	12
4	x	35+K	18+K	8+K	39+K	27+K	44+K	27+K	30+K	47+K

	y	28	16	4	29	39	31	30	11	9
5	x	46+K	40+K	31+K	43+K	36+K	17+K	9+K	33+K	17+K
	y	35	9	13	23	38	10	9	24	21
6	x	17+K	12+K	32+K	38+K	38+K	8+K	8+K	7+K	9+K
	y	32	33	17	26	19	30	21	16	9
7	x	9+K	8+K	7+K	13+K	35+K	15+K	30+K	16+K	21+K
	y	34	15	27	28	36	15	21	31	30
8	x	29+K	37+K	23+K	29+K	31+K	44+K	35+K	10+K	26+K
	y	18	8	5	23	28	6	37	34	28
9	x	46+K	17+K	36+K	38+K	27+K	34+K	12+K	15+K	47+K
	y	17	8	39	15	5	7	35	23	29
10	x	9+K	35+K	5+K	18+K	45+K	29+K	19+K	24+K	45+K
	y	16	16	21	6	34	31	10	37	21
11	x	10+K	45+K	23+K	14+K	41+K	31+K	9+K	33+K	46+K
	y	23	15	20	12	10	28	39	23	7
12	x	38+K	11+K	15+K	44+K	37+K	24+K	49+K	11+K	6+K
	y	10	4	17	18	17	6	20	22	20
13	x	35+K	41+K	30+K	16+K	21+K	31+K	44+K	32+K	16+K
	y	29	24	35	16	17	26	32	20	11
14	x	36+K	42+K	38+K	45+K	13+K	39+K	17+K	18+K	36+K
	y	20	38	10	4	12	15	35	31	38
15	x	17+K	22+K	42+K	5+K	16+K	7+K	27+K	24+K	5+K
	y	9	29	15	18	23	13	9	14	6
16	x	36+K	19+K	40+K	34+K	30+K	45+K	5+K	16+K	44+K
	y	28	5	9	9	18	19	9	23	31
17	x	30+K	15+K	43+K	7+K	26+K	8+K	21+K	34+K	14+K
	y	32	22	19	5	39	9	5	6	7
18	x	41+K	47+K	10+K	14+K	39+K	49+K	27+K	6+K	31+K
	y	32	37	22	27	39	31	29	36	39
19	x	37+K	40+K	5+K	21+K	19+K	8+K	40+K	16+K	43+K
	y	37	5	36	37	21	28	17	30	29
20	x	20+K	33+K	27+K	48+K	9+K	49+K	6+K	32+K	21+K
	y	22	27	33	26	38	21	21	39	12
21	x	13+K	24+K	36+K	39+K	6+K	32+K	41+K	25+K	12+K
	y	26	6	38	32	35	19	4	11	35
22	x	7+K	26+K	46+K	44+K	43+K	37+K	49+K	14+K	11+K
	y	27	33	10	4	33	24	20	19	9

23	x	40+K	44+K	9+K	31+K	40+K	14+K	26+K	23+K	27+K
	y	29	32	15	5	25	14	6	20	11
24	x	8+K	34+K	43+K	20+K	18+K	26+K	46+K	37+K	23+K
	y	7	33	13	5	16	35	34	19	13
25	x	23+K	21+K	34+K	24+K	33+K	39+K	41+K	25+K	29+K
	y	26	15	12	18	30	27	10	38	5
26	x	19+K	45+K	26+K	28+K	44+K	35+K	23+K	31+K	11+K
	y	39	20	9	15	26	33	21	8	20
27	x	11+K	19+K	34+K	41+K	43+K	11+K	12+K	38+K	17+K
	y	16	12	5	36	28	6	27	4	26
28	x	31+K	39+K	13+K	45+K	41+K	33+K	26+K	40+K	38+K
	y	10	17	36	22	35	30	14	25	7
29	x	20+K	20+K	24+K	30+K	46+K	35+K	38+K	49+K	21+K
	y	7	18	13	37	12	17	6	23	22
30	x	29+K	15+K	13+K	23+K	48+K	27+K	31+K	21+K	21+K
	y	32	36	28	24	22	37	12	4	39

Додаток Ж 1

Значення функції вигравіш

N	S_1 C_1	S_1 C_2	S_1 C_3	S_1 C_4	S_1 C_5	S_2 C_1	S_2 C_2	S_2 C_3	S_2 C_4	S_2 C_5	S_3 C_1	S_3 C_2	S_3 C_3	S_3 C_4	S_3 C_5
1	40+K	70	110	150	130	100+K	110	120	90	60	140+K	130	100	60	30
2	110+K	150	130	90	60	120+K	190	150	100	60	120+K	160	140	100	70
3	80+K	120	150	110	90	100+K	110	120	90	50	120+K	160	130	90	40
4	60+K	100	140	120	100	100+K	120	140	110	80	120+K	160	130	90	40
5	70+K	90	120	140	110	110+K	140	120	100	80	120+K	160	130	110	80
6	47+K	78	112	144	123	102+K	118	123	91	60	138+K	133	104	64	34
7	107+K	147	132	92	63	118+K	182	147	99	59	120+K	160	139	99	67
8	78+K	118	149	111	91	100+K	111	122	92	53	120+K	160	130	90	40
9	61+K	99	138	122	101	101+K	122	138	109	80	120+K	160	130	92	44
10	67+K	88	119	141	112	109+K	137	120	99	78	122+K	157	127	105	75
11	54+K	86	114	138	116	104+K	126	126	92	60	136+K	136	108	68	38
12	104+K	144	134	94	66	116+K	174	144	98	58	120+K	160	138	98	64
13	76+K	116	148	112	92	100+K	112	124	94	56	120+K	160	130	90	40
14	62+K	98	136	124	102	102+K	124	136	108	80	120+K	160	130	94	48

15	64+K	86	118	142	114	108+K	134	120	98	76	124+K	154	124	100	70
16	61+K	94	116	132	109	106+K	134	129	93	60	134+K	139	112	72	42
17	101+K	141	136	96	69	114+K	166	141	97	57	120+K	160	137	97	61
18	74+K	114	147	113	93	100+K	113	126	96	59	120+K	160	130	90	40
19	63+K	97	134	126	103	103+K	126	134	107	80	120+K	160	130	96	52
20	61+K	84	117	143	116	107+K	131	120	97	74	126+K	151	121	95	65
21	68+K	102	118	126	102	108+K	142	132	94	60	132+K	142	116	76	46
22	98+K	138	138	98	72	112+K	158	138	96	56	120+K	160	136	96	58
23	72+K	112	146	114	94	100+K	114	128	98	62	120+K	160	130	90	40
24	64+K	96	132	128	104	104+K	128	132	106	80	120+K	160	130	98	56
25	58+K	82	116	144	118	106+K	128	120	96	72	128+K	148	118	90	60
26	80+K	118	148	150	109	100+K	111	124	90	60	120+K	160	130	60	42
27	60+K	99	136	90	69	100+K	122	136	100	57	138+K	160	130	100	61
28	70+K	88	118	110	93	110+K	137	120	90	59	120+K	157	124	90	40
29	47+K	86	116	120	103	102+K	126	129	110	80	120+K	136	112	90	52
30	107+K	144	136	140	116	118+K	174	141	100	74	120+K	160	137	110	65

Додаток Ж 2

Імовірності станів бізнес-середовища

N	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	0,10	0,45	0,35	0,08	0,02
2	0,05	0,40	0,30	0,20	0,05
3	0,08	0,30	0,45	0,12	0,05
4	0,04	0,25	0,40	0,20	0,11
5	0,12	0,35	0,25	0,20	0,08
6	0,10	0,45	0,35	0,08	0,02
7	0,05	0,39	0,32	0,19	0,05
8	0,08	0,30	0,45	0,12	0,05
9	0,05	0,25	0,39	0,20	0,11
10	0,12	0,36	0,26	0,19	0,07
11	0,09	0,44	0,34	0,10	0,03
12	0,06	0,38	0,33	0,18	0,05
13	0,07	0,29	0,44	0,14	0,06
14	0,06	0,27	0,37	0,20	0,10
15	0,11	0,37	0,27	0,18	0,07

16	0,08	0,44	0,34	0,12	0,02
17	0,06	0,37	0,35	0,17	0,05
18	0,07	0,29	0,44	0,14	0,06
19	0,06	0,28	0,36	0,20	0,10
20	0,12	0,38	0,28	0,16	0,06
21	0,08	0,43	0,33	0,13	0,03
22	0,06	0,36	0,36	0,17	0,05
23	0,06	0,28	0,43	0,15	0,08
24	0,07	0,29	0,34	0,20	0,10
25	0,11	0,39	0,29	0,15	0,06
26	0,05	0,40	0,30	0,20	0,05
27	0,08	0,30	0,45	0,12	0,05
28	0,06	0,27	0,37	0,20	0,10
29	0,07	0,29	0,34	0,20	0,10
30	0,12	0,35	0,25	0,20	0,08

Додаток И

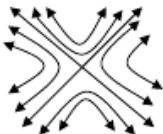
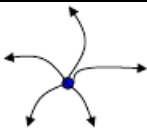
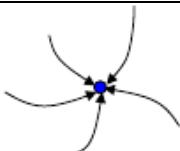

Варіанти вихідних даних до лабораторної роботи № 8



N	$a(x, y)$	$b(x, y)$	N	$a(x, y)$	$b(x, y)$
1	$3x - y$	$x + y + y^2$	16	$2x + y - y^2$	$3x + y$
2	$3x + y$	$x - y + y^2$	17	$x - 2y$	$x + 3y - y^2$
3	$3x - y$	$x + y - y^2$	18	$x + 2y$	$x + 3y - y^2$
4	$3x + y$	$x - y - y^2$	19	$x - 2y$	$x + 3y + y^2$
5	$x + 2y - y^2$	$2x - y$	20	$x + 2y$	$x + 3y + y^2$
6	$x - 2y - y^2$	$2x + y$	21	$4x - y - y^2$	$2x - y$
7	$x + 2y + y^2$	$2x - y$	22	$4x + y - y^2$	$2x - y$
8	$x - 2y + y^2$	$2x + y$	23	$4x - y + y^2$	$2x - y$
9	$x - 3y$	$x + y - y^2$	24	$4x + y + y^2$	$2x - y$
10	$x + 3y$	$-x + y - y^2$	25	$4x - y - y^2$	$2x + y$

11	$x - 3y$	$x + y + y^2$	26	$-2x + y - y^2$	$3x - y$
12	$x + 3y$	$-x + y - y^2$	27	$2x + y + y^2$	$3x + y$
13	$-2x + y - y^2$	$3x - y$	28	$-2x + y + y^2$	$3x - y$
14	$2x + y + y^2$	$3x + y$	29	$2x + y - y^2$	$3x + y$
15	$-2x + y + y^2$	$3x - y$	30	$x - 2y$	$x + 3y - y^2$

Додаток К

Дослідження стійкості нелінійної динамічної системи

Умова стійкості	Фазовий портрет системи	Назва	Динаміка
λ_1 та λ_2 дійсні ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$)			
λ_1 та λ_2 різних знаків		сідло	нестійка
$\lambda_1 > 0$ та $\lambda_2 > 0$		нестійкий вузол	нестійка
$\lambda_1 < 0$ та $\lambda_2 < 0$		стійкий вузол	стійка
λ_1 та λ_2 комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$			
$\alpha < 0$ (дійсна частина від'ємна)		стійкий фокус	стійка

$\alpha > 0$ (дійсна частина додатна)		нестійкий фокус	нестійка
$\alpha = 0$, тобто характеристичні числа $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ мають тільки уявну частину		граничний цикл	висновок щодо типу динаміки зробити неможливо